

Počtení část 1 - 8.2.2021

1. První limita: s odvoláním na větu o limitě složené funkce píšme nejprve

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^{-a})^{\sqrt{x}} = e^K, \quad K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + x^{-a})\sqrt{x}.$$

Pro $a = 0$ je $(1 + x^{-a}) = 2$ (pro každé $x \in \mathbb{R}$), pro $a < 0$ je $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^{-a}) = +\infty$, také víme, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, takže v obou případech je tedy podle věty o limitě složené funkce $L = +\infty$.

Dále tedy zkoumáme případ $a > 0$. Podle věty o limitě složené funkce je

$$K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^{-a})}{x^{-a}} \cdot x^{\frac{1}{2}-a}.$$

S využitím známé limity $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$ s dosazením $y = x^{-a}$ vidíme podle věty o limitě složené funkce, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^{-a})}{x^{-a}} = 1,$$

a podle aritmetiky limit a znalosti chování mocnin je tedy

$$K = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}-a} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{pro } a = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pro } a > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

takže $L = e^K$ je konečná právě když $a \geq \frac{1}{2}$.

Druhou limitu spočteme vhodným rozšířením, úpravou a použitím aritmetiky limit:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a (\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 - 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{(n^2 + 1) - (n^2 - 1)}{(n^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + (n^2 + 1)^{\frac{1}{3}}(n^2 - 1)^{\frac{1}{3}} + (n^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^a}{n^{\frac{4}{3}}((1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1 - \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}} + (1 - \frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} n^{a-\frac{4}{3}} = \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > \frac{4}{3}, \\ \frac{2}{3} & \text{pro } a = \frac{4}{3}, \\ 0 & \text{pro } a < \frac{4}{3}, \end{cases} \end{aligned}$$

tedy je konečná pro $a \leq \frac{4}{3}$. Obě limity zároveň jsou konečné pro $a \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$.

2. (a) Zřejmě $\frac{x}{x^2+1} < 0$, pro druhou nerovnost jsou jednou možností ekvivalentní úpravy, např.

$$\frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2} \iff 2x \geq -x^2 - 1 \iff x^2 + 2x + 1 \geq 0,$$

což zřejmě platí. Druhou možností je stručně vyšetřit na $\mathbb{R}_-$ průběh této funkce, která má v $-\infty$ a v $0-$ nulové limity a v bodě -1 má globální minimum $-\frac{1}{2}$.

(b) $D_f = \mathbb{R}$, z omezenosti funkce $\operatorname{arccotg}$ plyne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, takže funkce je spojitá v nule a taktéž v celém $\mathbb{R}$. Dále snadno určíme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ a jediný průsečík s osami je $[0, 0]$.

Nejprve si spočteme tuto derivaci, která se nám bude několikrát hodit:

$$\left(\operatorname{arccotg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

(Odsud mimochodem neplyne, že by se $\operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ měla rovnat funkci $\operatorname{arctg} x$ pro každé $x \neq 0$. Ve skutečnosti se shodují jen na $\mathbb{R}_+$, zato na $\mathbb{R}_-$ se liší o konstantu π .)

Pro $x \neq 0$ je pak

$$f'(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1},$$

výpočet stacionárního bodu je neřešitelná rovnice, ale můžeme určit, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \neq 0$. Pro $x > 0$ je to zřejmé, neboť oba sčítance jsou kladné. Pro $x < 0$ si všimneme, že $\operatorname{arccotg} \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$, a podle bodu (a) je $\frac{x}{x^2+1} \in [-\frac{1}{2}, 0)$, takže součet těchto členů je opět kladný. Bod 0 je výjimečným bodem funkce f , f roste na $\mathbb{R}_-$ i na $\mathbb{R}_+$ a díky spojitosti roste i v celém $\mathbb{R}$. Obor hodnot je taktéž $\mathbb{R}$.

Dále snadno spočteme

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \pi, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Pro $x \neq 0$ je

$$f''(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{(x^2 + 1)^2} > 0,$$

takže f je konvexní v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$, nelze však říci, že by byla konvexní v celém $\mathbb{R}$, protože $f'_+(0) < f'_-(0)$.

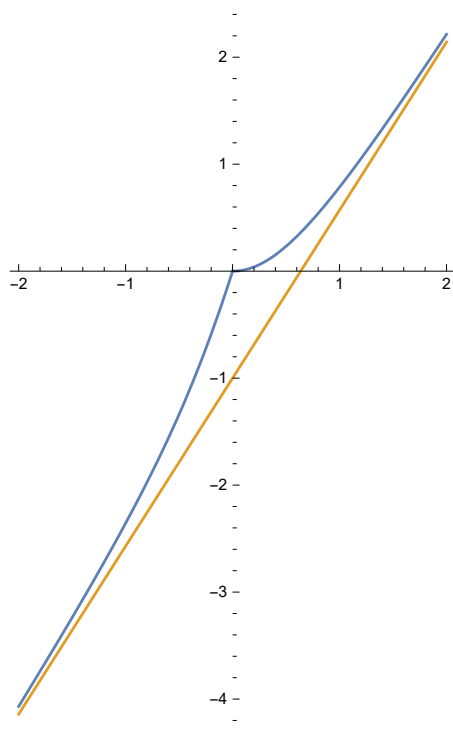
Nakonec spočteme asymptotu. Snadno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2},$$

a pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = -1,$$

takže v $\pm\infty$ máme asymptotu $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.



Závěrečná poznámka: necháte-li si vykreslit tuto funkci například na wolframalpha.com, dostanete v záporné části osy x jiný graf, což plyne z odlišné definice funkce $\operatorname{arccotg}$: bere se tam jako inverzní funkce ke $\cotg$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, proto je jejich funkce $\operatorname{arccotg} x$ lichá a nespojitá v nule (a rovná $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$).